Transformadas aritméticas relacionadas com a função zeta de Riemann

Hélder Lima

Orientado por: Semyon Yakubovich

Programa Novos Talentos em Matemática

Função zeta de Riemann ($\zeta(s)$)

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \, Re\, s > 1$$

$$\zeta(s) = \prod_{p\ primo} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}, \, Re\, s > 1$$

(a igualdade entre as duas fórmulas acima pode ser vista utilizando o Teorema Fundamental da Aritmética e a expansão em série de Taylor da expressão dentro do produtório)

$$(1 - 2^{1-s})\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}, \, Re\, s > 0$$

Função zeta de Riemann ($\zeta(s)$)

A função zeta de Riemann satisfaz a seguinte **equação funcional:**

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin(\frac{\pi s}{2}) \Gamma(1-s) \zeta(1-s)$$

Esta equação vai nos permitir prolongar $\zeta(s)$, obtendo uma função analítica em todo o plano complexo, excepto no ponto $s = 1$ onde a função $\zeta(s)$ tem um pólo simples.

Hipótese de Riemann (curiosidade)

- A hipótese de Riemann é um dos Millenium Prize Problems.
- É uma conjectura relacionada com a distribuição dos zeros de $\zeta(s)$, que diz que os zeros não triviais de $\zeta(s)$ se encontram todos na recta vertical $\{s \in \mathcal{C} : Re(s) = \frac{1}{2}\}$.
- O problema reduz-se à faixa crítica: $\{s \in \mathcal{C} : 0 < Re(s) < 1\}$.

Funções aritméticas

Função de Möbius ($\mu(n)$):

- $\mu(1) = 1$
- $\mu(n) = (-1)^k$, se n é o produto de k primos distintos
- $\mu(n) = 0$, se a decomposição de n como produto de primos contém algum primo elevado a uma potência maior do que 1

Esta função tem a seguinte propriedade:

$$\forall n > 1, \sum_{d|n} \mu(d) = 0$$

Funções aritméticas

Fórmula de inversão de Möbius:
A função de Möbius fornece-nos uma fórmula que relaciona duas funções f e g definidas no conjunto dos números naturais. Seja f uma função definida para todo o $n \in \mathbb{N}$ e defina-se a função g:

$$\forall n \in \mathbb{N}, g(n) := \sum_{d|n} f(d)$$

Então temos que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = \sum_{d|n} \mu(\frac{n}{d}) g(d)$$

Funções aritméticas

Função divisora de Dirichlet ($d(n)$):
$\forall n \in \mathbb{N}, d(n)$ denota o número de divisores (naturais) de n.
Esta função pode ser generalizada por $d_k(n)(k \in \mathbb{N})$ que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, indica o número de formas diferentes de escrever n como o produto de k factores naturais.
$(d(n) = d_k(n)$, para $k = 2)$

Funções aritméticas

- $\sigma_a(n)(a \in \mathcal{C})$:

  $$\forall n \in \mathbb{N}, \sigma_a(n) := \sum_{d|n} d^a$$

  $(d(n) = \sigma_a(n), para\ a = 0)$

- $a(n)$ denota o maior divisor ímpar de n

- **Função de Euler($\varphi(n)$)**:
  $\varphi(n)=|\{m \in \mathbb{N} : m \leq n\ e\ (m, n) = 1\}|$

Funções aritméticas

- $\omega(n)$ representa o número de factores primos distintos de n
- $\Omega(n)$ representa a soma das potências de cada primo na decomposição em factores primos de n
- Se $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{a_i}$, com $\forall 1 \leq i \leq k : p_i$ primo e $a_i \in \mathbb{N}$ então:
  $\omega(n) = k$ e $\Omega(n) = \sum_{i=1}^{k} a_i$
- **Função de Liouville ($\lambda(n)$):**
  $\lambda(n) = (-1)^{\Omega(n)}$

Identidades de Ramanujan

$$(\zeta(s))^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^s}, Re(s) > 1$$

$$(\zeta(s))^k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_k(n)}{n^s}, Re(s) > 1 \ (k \in \mathbb{N})$$

Identidades de Ramanujan

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}, Re(s) > 1$$

$$\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu(n)|}{n^s}, Re(s) > 1$$

Identidades de Ramanujan

$$\frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s}, Re(s) > 1$$

$$\frac{\zeta(s)\zeta(s-a)\zeta(s-b)\zeta(s-a-b)}{\zeta(2s-a-b)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_a(n)\sigma_b(n)}{n^s},$$

$$Re(s) > \max\{1, Re(a)+1, Re(b)+1, Re(a+b)+1\}$$

Identidades de Ramanujan

$$\zeta(s)\zeta(s-a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_a(n)}{n^s}, Re(s) > \max\{1, Re(a)+1\}$$

$$\frac{(\zeta(s))^2}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\omega(n)}}{n^s}, Re(s) > 1$$

Identidades de Ramanujan

$$\frac{(\zeta(s))^3}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n^2)}{n^s}, Re(s) > 1$$

$$\frac{(\zeta(s))^4}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2(n)}{n^s}, Re(s) > 1$$

Identidades de Ramanujan

$$\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s}, Re(s) > 2$$

$$\frac{1-2^{1-s}}{1-2^{-s}}\zeta(s-1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}, Re(s) > 2$$

Transformada de Mellin

$$f^*(s) = \int_0^\infty f(t)t^{s-1}dt$$

Inversa:

$$f(t) = \int_{c_0-i\infty}^{c_0+i\infty} f^*(s)t^{-s}ds, c_0 = Re(s)$$

$$f(t) = \int_C f^*(s)t^{-s}ds, C = \{s \in \mathcal{C} : Re(s) = c_0\}$$

Transformada de Möbius

$$C = \{s \in \mathcal{C} : Re(s) = c_0\}, c_0 > 1$$

$$g(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \zeta(s) f^*(s) x^{-s} ds = \sum_{n=1}^{\infty} f(xn)$$

Inversa:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{g^*(s)}{\zeta(s)} x^{-s} ds = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) g(xn)$$

Transformada de Möbius

Composta:

$$M^k(g) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \zeta^k(s) g^*(s) x^{-s} ds = \sum_{n=1}^{\infty} d_k(n) g(xn)$$

Inversa da Composta:

$$(M^k)^{-1}(g) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{g^*(s)}{\zeta^k(s)} x^{-s} ds = \sum_{n=1}^{\infty} f_k(n) g(xn),$$

com $f_1(n) = \mu(n)$ e $f_{k+1}(n) = \sum_{d|n} \mu(\frac{n}{d}) f_k(d), \forall k \in \mathbb{N}$

Mais uma transformada...

$$C = \{s \in \mathcal{C} : Re(s) = c_0\}, c_0 > 1$$

$$g(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C (1 - 2^{1-s})\zeta(s) f^*(s) x^{-s} ds = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} f(xn)$$

Inversa:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{g^*(s)}{(1 - 2^{1-s})\zeta(s)} x^{-s} ds = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} 2^k \mu(n) g(xn)$$

Mais uma transformada...

Composta:

$$(M')^k(g) = \frac{1}{2\pi i}\int_C (1-2^{1-s})^k \zeta^k(s) g^*(s) x^{-s} ds =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{k} 2^m \binom{k}{m} d_k(n) g(xn2^m)$$

Inversa da Composta:

$$((M')^k)^{-1}(g) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{g^*(s)}{(1-2^{1-s})^k \zeta^k(s)} x^{-s} ds =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} 2^m \binom{m+k-1}{k-1} f_k(n) g(xn2^m)$$

Fórmula de Müntz

Observe-se a seguinte fórmula de Müntz que engloba a função zeta de Riemann (em que f é uma função arbitrária com propriedades adequadas):

$$\zeta(s)\int_0^\infty y^{s-1}f(y)dy = \int_0^\infty x^{s-1}(\sum_{n=1}^\infty f(nx) - \frac{1}{x}\int_0^\infty f(v)dv)dx,$$

com $s \in \mathcal{C}$ tal que $0 < Re(s) < 1$

Fórmulas análogas à de Müntz

Caso $\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}$

Para $s \in \mathcal{C}$ tal que $Re(s) = c_0 > 1$ temos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\mu(n)| f(xn) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_0 > 1} \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} f^*(s) x^{-s} ds$$

Mas, se tivermos $\frac{1}{2} < c_1 < 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\mu(n)| f(xn) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_0 > 1} \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} f^*(s) x^{-s} ds$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2} < c_1 < 1} \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} f^*(s) x^{-s} ds + \underset{s=1}{res} \left(\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} f^*(s) x^{-s} \right)$$

Fórmulas análogas à de Müntz

Caso $\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}$

Como as funções $\zeta(2s), f^*(s)$ e x^{-s} são analíticas no ponto $s = 1$ que, por sua vez, é um pólo simples da função zeta de Riemann, conclui-se que $\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} f^*(s)x^{-s}$ tem um pólo simples em $s = 1$ logo:

$$\underset{s=1}{res}\left(\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} f^*(s)x^{-s}\right) = \lim_{s\to 1}(s-1)\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} f^*(s)x^{-s}$$

Note-se agora que $res_{s=1}\,\zeta(s) = 1$ e que, como $s = 1$ é um pólo simples da função zeta de Riemann, tem-se que $res_{s=1}\,\zeta(s) = \lim_{s\to 1}(s-1)\zeta(s)$. Então $\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta(s) = 1$.

Fórmulas análogas à de Müntz

Caso $\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}$

Portanto, podemos calcular:

$$\underset{s=1}{res}\left(\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}f^*(s)x^{-s}\right) = \lim_{s\to 1}(s-1)\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}f^*(s)x^{-s} =$$

$$= \frac{f^*(1)x^{-1}}{\zeta(2)} = \frac{6}{\pi^2 x}\int_0^\infty f(v)dv$$

Daqui se conclui que:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\mu(n)|f(xn) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}<c_1<1}\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}f^*(s)x^{-s}ds + \frac{6}{\pi^2 x}\int_0^\infty f(v)dv$$

Fórmulas análogas à de Müntz

Caso $\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}$

Portanto:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}<c_1<1}\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}f^*(s)x^{-s}ds = \sum_{n=1}^{\infty}|\mu(n)|f(xn) - \frac{6}{\pi^2 x}\int_0^{\infty} f(v)dv$$

Aplicando agora a transformada de Mellin obtém-se uma igualdade análoga à fórmula de Muntz:

$$\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}\int_0^{\infty} y^{s-1}f(y)dy = \int_0^{\infty} x^{s-1}(\sum_{n=1}^{\infty}|\mu(n)|f(xn) - \frac{6}{\pi^2 x}\int_0^{\infty} f(v)dv)dx$$

Fórmulas análogas à de Müntz

Caso $\frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)}$

Para $s \in \mathcal{C}$ tal que $Re(s) = c_1 > 1$ temos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{\omega(n)} f(xn) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_1>1} \frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)} f^*(s) x^{-s} ds$$

Mas, se tivermos $\frac{1}{2} < c_0 < 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} 2^{\omega(n)} f(xn) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c_1>1} \frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)} f^*(s) x^{-s} ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}<c_0<1} \frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)} f^*(s) x^{-s} ds + \underset{s=1}{res}\left(\frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)} f^*(s) x^{-s}\right)\end{aligned}$$

Fórmulas análogas à de Müntz

Caso $\frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)}$

Como as funções $\zeta(2s)$, $f^*(s)$ e x^{-s} são analíticas no ponto $s=1$ que, por sua vez, é um pólo simples da função zeta de Riemann, conclui-se que $\frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)}f^*(s)x^{-s}$ tem um pólo duplo em $s=1$ logo:

$$\underset{s=1}{res}\left(\frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)}f^*(s)x^{-s}\right) = \lim_{s\to1}\frac{d}{ds}(s-1)^2\frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)}f^*(s)x^{-s} =$$

$$= \ldots = \frac{6}{\pi^2 x}\int_0^{\infty}\left(\ln\left(\frac{A^{12}v}{2\pi x}\right)-\gamma\right)f(v)dv$$

(em que γ é a constante de Euler-Mascheroni e
A é a constante de Glaisher-Kinkelin)

Fórmulas análogas à de Müntz

Caso $\frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)}$

Daqui se conclui que:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}<c_0<1}\frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)}f^*(s)x^{-s}ds =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} 2^{\omega(n)} f(xn) - \frac{6}{\pi^2 x}\int_0^{\infty}(\ln(\frac{A^{12}v}{2\pi x}) - \gamma)\, f(v)dv$$

Aplicando agora a transformada de Mellin obtém-se mais uma igualdade análoga à fórmula de Muntz:

$$\frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)}\int_0^{\infty} y^{s-1}f(y)dy =$$

$$= \int_0^{\infty} x^{s-1}(\sum_{n=1}^{\infty} 2^{\omega(n)} f(xn) - \frac{6}{\pi^2 x}\int_0^{\infty}(\ln(\frac{A^{12}v}{2\pi x}) - \gamma)\, f(v)dv)dx$$

Fórmulas análogas à de Müntz

Mais 2 casos

Com um raciocínio semelhante aos utilizados anteriormente obtemos mais 2 igualdades análogas á fórmula de Muntz:

- $\frac{\zeta^3(s)}{\zeta(2s)} \int_0^\infty y^{s-1} f(y)dy = \int_0^\infty x^{s-1} (\sum_{n=1}^\infty d(n^2) f(xn) - R_3)\, dx$
- $\frac{\zeta^4(s)}{\zeta(2s)} \int_0^\infty y^{s-1} f(y)dy = \int_0^\infty x^{s-1} (\sum_{n=1}^\infty d^2(n) f(xn) - R_4)\, dx$

com:

$$R_3 = \underset{s=1}{res} (\frac{\zeta^3(s)}{\zeta(2s)} f^*(s) x^{-s}) = \frac{1}{2} \lim_{s \to 1} \frac{d^2}{ds^2} ((s-1)^3 \frac{\zeta^3(s)}{\zeta(2s)} f^*(s) x^{-s})$$

$$R_4 = \underset{s=1}{res} (\frac{\zeta^4(s)}{\zeta(2s)} f^*(s) x^{-s}) = \frac{1}{6} \lim_{s \to 1} \frac{d^3}{ds^3} ((s-1)^4 \frac{\zeta^4(s)}{\zeta(2s)} f^*(s) x^{-s})$$

Referências:

- S. B. Yakubovich, *Integral and series transformations via Ramanujan's identities and Salem's type equivalences to the Riemann hypothesis*
- E. C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta-function*
- O. I. Marichev, *Handbook of integral transforms of higher transcendental functions*
- T. M. Apostol, *Introduction To Analytic Number Theory*