

SEMINÁRIO DIAGONAL
Convergência de séries p -ádicas

João Lourenço, 2º ano FCUP
Bolseiro do programa *Novos Talentos em Matemática*

O modo usual de medir o comprimento de um racional $q \in \mathbb{Q}$ consiste em tomar o seu módulo $|q|$. Será que existem outras normas em \mathbb{Q} que originem espaços métricos totalmente distintos?

A resposta é afirmativa e indica que para cada primo p a função $|\cdot|_p : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ dada por

$$|q|_p = \begin{cases} p^{-ord_p(q)} & \text{se } q \neq 0 \\ 0 & \text{se } q = 0 \end{cases}$$

onde $ord_p(q)$ indica o expoente de p na factorização prima de q , é uma norma em \mathbb{Q} , à qual se dá o nome de norma p -ádica. De facto, estas tratam-se das únicas normas, além da usual, que permitem medir os racionais.

Neste seminário, iremos fazer uma breve introdução ao tópico dos p -ádicos, notando as suas relações com a teoria dos números e as suas propriedades topológicas mais exóticas.

Passaremos depois ao estudo das séries em \mathbb{Q}_p (corpo que desempenha no caso da métrica p -ádica o papel de \mathbb{R} na métrica usual), mostrando como é possível que uma mesma série de racionais convirja para diferentes valores em diferentes domínios p -ádicos. Por fim, falaremos de algumas questões naturais que surgem em torno da série $\sum_{n=1}^{+\infty} n!$.