Polinómios Simétricos e Polinómios W-harmónicos

José Pedro Quintanilha

Sob orientação do Prof. Samuel Lopes

Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

28 de Maio de 2014

Terminologia

- Consideramos polinómios sobre $\mathbb{C}$ em n variáveis:

$$\sum c_{(j_1,\ldots,j_n)} x_1^{j_1} \cdots x_n^{j_n} \qquad c_{(j)} \in \mathbb{C}$$

- O **grau** do monómio $cx_1^{j_1} \cdots x_n^{j_n}$ é dado por $j_1 + \cdots + j_n$.

- Um polinómio diz-se **homogéneo** se todos os seus monómios tiverem o mesmo grau.

- Escrevemos $\mathbb{P} = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$.

Polinómios simétricos

Definição

Dizemos que um polinómio $P \in \mathbb{P}$ é **simétrico** se é invariante por qualquer permutação das suas variáveis.

Designamos por $\mathbb{P}^W$ o conjunto dos polinómios simétricos.

Exemplos $(n = 3)$:

$$x + y + z \qquad 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + xyz \qquad xy + yz + xz$$

Polinómios simétricos elementares

Definição

Se $1 \leq k \leq n$, o **polinómio simétrico elementar** I_k é a soma de todos os produtos possíveis de k variáveis.

Exemplo ($n = 4$):

$$I_1 = x + y + z + w \qquad I_3 = xyz + xyw + xzw + yzw$$
$$I_2 = xy + xz + xw + yz + yw + zw \qquad I_4 = xyzw$$

Teorema de Viète

Seja $p \in \mathbb{C}[z]$ mónico de grau n com raízes $x_1, \ldots, x_n$. Então

$$p(z) = z^n - I_1 z^{n-1} + I_2 z^{n-2} - \cdots + (-1)^n I_n$$

Prova: Basta expandir $(z - x_1)(z - x_2) \cdots (z - x_n)$.

Polinómios simétricos elementares

Teorema Fundamental dos Polinómios Simétricos

Se $P \in \mathbb{P}^W$, então P pode ser escrito (de forma única) como um polinómio em $I_1, \ldots, I_n$.

$$\mathbb{P}^W = \mathbb{C}[I_1, \ldots, I_n]$$

Exemplo ($n = 3$):

$$\begin{aligned} 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + xyz &= 3(x^2 + y^2 + z^2) + xyz \\ &= 3[(x+y+z)^2 - 2(xy + xz + yz)] + xyz \\ &= 3I_1^2 - 6I_2 + I_3 \end{aligned}$$

Polinómios simétricos elementares

Prova da existência:

- Ordenamos os monómios de P lexicograficamente, de acordo com os expoentes. Seja $cx_1^{j_1}x_2^{j_2}\cdots x_n^{j_n}$ o **monómio-guia** ($j_1 \geq j_2 \geq \cdots \geq j_n$, porque P é simétrico).
- Seja $Q_1 = cI_1^{j_1-j_2}I_2^{j_2-j_3}\cdots I_{n-1}^{j_{n-1}-j_n}I_n^{j_n}$. O monómio-guia de Q_1 é o mesmo que o de P.
- $P - Q_1$ tem um monómio-guia mais baixo. Aplicamos o mesmo método a este polinómio e iteramos até ficar $P - Q_1 - Q_2 - \cdots - Q_k = 0$.
- Assim, $P = Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_k$.

Aplicação

Teorema Fundamental dos Polinómios Simétricos

Se $P \in \mathbb{P}^W$, então P pode ser escrito como um polinómio em $I_1, \ldots, I_n$ de forma única.

Teorema de Viète

Seja $p \in \mathbb{C}[z]$ mónico de grau n com raízes $x_1, \ldots, x_n$. Então

$$p(z) = z^n - I_1 z^{n-1} + I_2 z^{n-2} - \cdots + (-1)^n I_n$$

O Teorema de Viète e o TFPS dizem-nos que qualquer função polinomial simétrica nas raízes de $p \in \mathbb{C}[z]$ se pode expressar como um polinómio nos seus coeficientes.

Exemplo: Seja $p \in \mathbb{C}[z]$ com coeficientes inteiros. Então a soma dos cubos das raízes (complexas) de p é inteira.

Polinómios W-harmónicos

Dado um polinómio $P = \sum c_{(j)} x_1^{j_1} \cdots x_n^{j_n} \in \mathbb{P}$, definimos o operador

$$\begin{aligned} \partial_P : \mathbb{P} &\longrightarrow \mathbb{P} \\ Q &\longmapsto \sum c_{(j)} \frac{\partial^{j_1}}{\partial x_1^{j_1}} \cdots \frac{\partial^{j_n}}{\partial x_n^{j_n}} Q \end{aligned}$$

Exemplos ($n = 3$):

- Se $P = x^2 y + 5z + 1$, então $\partial_P Q = \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} Q + 5 \frac{\partial}{\partial z} Q + Q$.
- Um polinómio Q é harmónico se $\partial_P Q = 0$, onde $P = x^2 + y^2 + z^2$.

Polinómios W-harmónicos

Definição

Designe-se por $\mathbb{P}_+^W$ o conjunto dos polinómios simétricos com termo constante nulo. Um polinómio $Q \in \mathbb{P}$ diz-se **W-harmónico** se para todo $P \in \mathbb{P}_+^W$ se tem $\partial_P Q = 0$.

Escrevemos $\mathcal{H}$ para denotar o conjunto dos polinómios W-harmónicos.

Nota: Todas as "funções W-harmónicas" são polinómios.

Como consequência do TFPS, um polinómio $Q \in \mathbb{P}$ é W-harmónico sse $\partial_{I_k} Q = 0$ para todo $1 \leq k \leq n$.

Polinómios W-harmónicos

Exemplos:

$n = 2$

$$1 \qquad x - y$$

$n = 3$

$$1 \qquad x - y \qquad x - z$$

$$x^2 - y^2 - 2xz + 2yz \qquad x^2 - z^2 - 2xy + 2yz$$

$$xy^2 - x^2y + yz^2 - y^2z + x^2z - xz^2$$

Facto conhecido

$\mathcal{H}$ tem dimensão $n!$ (como espaço vectorial sobre $\mathbb{C}$).

Problema: Quais são, explicitamente, os polinómios W-harmónicos?

Determinante de Vandermonde

Definição

A matriz V de dimensão $n \times n$ com $V_{i,j} = x_i^{j-1}$ é chamada **Matriz de Vandermonde**.

Exemplo ($n = 4$):

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & w & w^2 & w^3 \end{pmatrix}$$

Determinante de Vandermonde

Teorema

É válida a seguinte fórmula para o determinante de Vandermonde:

$$|V| = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

Exemplo ($n = 4$):

$$\begin{aligned} |V| &= \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & w & w^2 & w^3 \end{vmatrix} \\ &= (y-x)(z-x)(w-x)(z-y)(w-y)(w-z) \end{aligned}$$

Observação: $|V|$ é homogéneo, de grau $\binom{n}{2}$.

Determinante de Vandermonde

Prova:

- Para quaisquer $1 \leq i < j \leq n$, pondo $x_j = x_i$ anulamos $|V|$ (a matriz fica com duas linhas iguais). Isso mostra que $(x_j - x_i)$ divide $|V|$.
- Estas diferenças são elementos irredutíveis não associados em $\mathbb{P}$, logo o produtório indicado divide $|V|$.
- O grau de cada membro da igualdade é $\binom{n}{2}$, portanto os polinómios são múltiplos escalares um do outro.
- A parcela de $|V|$ correspondente à permutação identidade é $x_2 x_3^2 \cdots x_n^{n-1}$, e o seu coeficiente é 1. É também este o coeficiente desse monómio na expressão da direita, o que mostra a igualdade.

O primeiro polinómio W-harmónico

Teorema

O determinante de Vandermonde é W-harmónico: $|V| \in \mathcal{H}$

Prova:

- Notar que $\frac{\partial}{\partial x_i}|V|$ é o determinante da matriz obtida de V derivando as entradas da i-ésima linha (aplicar a expansão de Laplace).
- Isto resulta de x_i figurar apenas nessa linha, portanto podemos aplicar a mesma ideia às derivadas sucessivas de V.

Exemplo ($n = 4$):

$$\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial w}|V| = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 0 & 2 & 6y \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 0 & 1 & 2w & 3w^2 \end{vmatrix}$$

O primeiro polinómio W-harmónico

- $\partial_{I_k}|V|$ tem $\binom{n}{k}$ parcelas, obtidas derivando k linhas de V e tomando o determinante, para todas as escolhas possíveis.

  Exemplo ($n = 3$):

$$\partial_{I_2}|V| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2x \\ 1 & y & y^2 \\ 0 & 1 & 2z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2y \\ 0 & 1 & 2z \end{vmatrix}$$

- Consideremos duas variáveis x_i e x_j. Se pusermos $x_i = x_j$, anulamos $\partial_{I_k}|V|$. Para ver isso, observemos cada parcela:
  - Se ambas, ou nenhuma das linhas i,j de V foram derivadas, a substituição torna as linhas iguais e anula o determinante.
  - Se a linha i foi derivada mas a linha j não, então existe uma outra parcela correspondente à escolha de j mas não i, e das mesmas $k - 1$ variáveis restantes. A substituição torna as parcelas simétricas (pois uma matriz é obtida da outra por troca de linhas), anulando a sua soma.

O primeiro polinómio W-harmónico

- Isto mostra que $(x_j - x_i)$ divide $\partial_{I_k}|V|$, para quaisquer $1 \leq i < j \leq k$.
- Daqui, como atrás, $\partial_{I_k}|V|$ é múltiplo de $|V|$.
- Mas o grau de $|V|$ é claramente superior ao de $\partial_{I_k}|V|$, portanto tem de ser $\partial_{I_k}|V| = 0$.
- Conclui-se que o determinante de Vandermonde é W-Harmónico.

Uma base de $\mathcal{H}$

Como os operadores de derivação comutam, derivando um polinómio W-harmónico obtemos ainda um W-harmónico.

Será possível obter uma base de $\mathcal{H}$ usando derivação a partir do determinante de Vandermonde?

Uma base de $\mathcal{H}$

Consideremos de novo a ordem lexicográfica. Se derivarmos dois monómios em ordem a alguma variável (e nenhum deles for anulado), então a relação de ordem é preservada.

Atentemos no caso $n = 4$:

- O **monómio-cauda** de $|V|$ é yz^2w^3.
- **Ideia:** Se aplicarmos a $|V|$ um operador do tipo $\frac{\partial^a}{\partial y^a}\frac{\partial^b}{\partial z^b}\frac{\partial^c}{\partial w^c}$, com $a \leq 1$, $b \leq 2$ e $c \leq 3$, esse monómio não é anulado.
- Todos estes operadores dão origem a monómios-cauda diferentes (da forma $cy^{1-a}z^{2-b}w^{3-c}$).
- Assim, estes operadores dão origem a um conjunto de polinómios linearmente independentes!

Uma base de $\mathcal{H}$

Generalizando:

- O monómio-cauda de $|V|$ é $x_1^0 x_2^1 \cdots x_n^{n-1}$.
- Consideramos os operadores da forma $\frac{\partial^{a_1}}{\partial x_1^{a_1}} \frac{\partial^{a_2}}{\partial x_2^{a_2}} \cdots \frac{\partial^{a_n}}{\partial x_n^{a_n}}$, onde $0 \leq a_i < i$, para cada i. Designemo-los simplesmente por $\partial_{(a_1, a_2, \cdots, a_n)}$.
- O monómio-cauda de $\partial_{(a_1, a_2, \cdots, a_n)}|V|$ é da forma $cx_1^{0-a_1} x_2^{1-a_2} \cdots x_n^{n-1-a_n}$.
- Estes operadores dão origem a um conjunto de polinómios linearmente independentes.

Uma base de $\mathcal{H}$

Quantos polinómios obtemos por este processo? Exactamente o número de tuplos $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$, onde

$$\begin{aligned} a_1 &\in \{0\} \\ a_2 &\in \{0, 1\} \\ &\vdots \\ a_n &\in \{0, 1, \cdots, n-1\} \end{aligned}$$

Temos $n!$ escolhas possíveis. Como é esta a dimensão de $\mathcal{H}$, construímos uma base!

Uma base de $\mathcal{H}$

Exemplo ($n = 3$):

$$(0,0,0) \leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} \qquad (0,0,1) \leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 0 & 1 & 2z \end{vmatrix}$$

$$(0,0,2) \leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \qquad (0,1,0) \leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2y \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$$

$$(0,1,1) \leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2y \\ 0 & 1 & 2z \end{vmatrix} \qquad (0,1,2) \leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2y \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Definição

Dados um grupo G e um conjunto X, um homomorfismo

$$\pi : G \longrightarrow S_X$$

onde S_X é o grupo das permutações de X, diz-se uma **acção** de G sobre X. "G actua sobre X".

Em particular, se V é um espaço vectorial, um homomorfismo

$$\pi : G \longrightarrow GL(V)$$

onde $GL(V)$ é o grupo dos endomorfismos lineares invertíveis de V, diz-se uma **representação** de G. Também se diz que "V é uma representação de G".

$\mathbb{P}$ como representação de S_n

S_n (o grupo simétrico) actua sobre $\mathbb{P}$ permutando as variáveis de um polinómio. $\mathbb{P}$ é uma representação de S_n.

Exemplos:

- A transposição $(1\,3)$ envia o polinómio $xy + 2z$ em $yz + 2x$.
- $\mathbb{P}^W$ é, por definição, o conjunto dos polinómios que ficam fixos pela acção de S_n.
- O conjunto dos polinómios de grau menor ou igual a k é um subespaço de $\mathbb{P}$ invariante para a acção de S_n. É uma **subrepresentação** de $\mathbb{P}$.
- $\mathcal{H}$ é uma subrepresentação de $\mathbb{P}$.

Outra representação de S_n

Considere-se $\mathbb{C}S_n$, o espaço vectorial das combinações lineares (formais) de elementos de S_n.

S_n actua sobre $\mathbb{C}S_n$ por multiplicação à esquerda.

Exemplo ($n = 3$):

- $5(1\,2) - (1\,3) + i(1\,3\,2)$ é um elemento de $\mathbb{C}S_3$.
- A transposição $(1\,3) \in S_3$ envia-o em $5(1\,2\,3) - e + i(2\,3)$.

Outra representação de S_n

Qualquer representação V de um grupo G admite como subrepresentações o subespaço trivial $\{0\}$ e o próprio V.

Uma representação que não admite mais nenhuma subrepresentação diz-se **irredutível**.

Factos conhecidos

$\mathbb{C}S_n$ contém todas as subrepresentações irredutíveis (a menos de isomorfismo) de S_n.

$\mathcal{H}$ é isomorfo a $\mathbb{C}S_n$ (como representação de S_n).

Perspectivas

Problema: Encontrar uma nova base de $\mathcal{H}$, que nos dê a sua decomposição em representações irredutíveis.

Equivalentemente, estabelecer explicitamente o isomorfismo de representações

$$\mathcal{H} \longleftrightarrow \mathbb{C}S_n$$

Algumas pistas...

$$1 \longleftrightarrow \sum_{\sigma \in S_n} \sigma$$

$$|V| \longleftrightarrow \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\sigma$$