O Problema do Isomorfismo entre Anéis de Frações de Planos Quânticos

Manuel Martins

sob orientação de Christian Lomp e Paula Carvalho

Seminário Diagonal
Programa Novos Talentos em Matemática da Fundação Calouste Gulbenkian

04/06/2014

Conceitos iniciais

Definição

Um **anel** R é um conjunto munido com uma operação comutativa $+$ tal que $(R, +)$ é um grupo abeliano e também uma operação $\cdot$ associativa e distributiva sobre $+$. Ex: os inteiros, os racionais, os anéis de polinómios, etc.
Mais ainda, se $R\backslash\{0\}$ for um grupo abeliano para operação $\cdot$, então R diz-se um **corpo**. Ex: os racionais, os reais, os complexos, etc.

Conceitos iniciais

Definição

Um **anel** R é um conjunto munido com uma operação comutativa $+$ tal que $(R, +)$ é um grupo abeliano e também uma operação $\cdot$ associativa e distributiva sobre $+$. Ex: os inteiros, os racionais, os anéis de polinómios, etc.
Mais ainda, se $R \backslash \{0\}$ for um grupo abeliano para operação $\cdot$, então R diz-se um **corpo**. Ex: os racionais, os reais, os complexos, etc.

Definição

Uma **álgebra sobre um corpo** K é um anel munido com uma operação de multiplicação por escalares, que lhe confere uma estrutura de espaço vetorial sobre K. Ex: os anéis de polinómios, o plano quântico, etc.

Conceitos iniciais

Definição

Um **homomorfismo** entre duas álgebras R_1 e R_2 sobre um corpo K é uma função $\varphi : R_1 \longrightarrow R_2$ que preserva as operações das álgebras. Isto é:

$$\varphi(r+s) = \varphi(r) + \varphi(s),\ \forall r, s \in R_1$$
$$\varphi(r \cdot s) = \varphi(r) \cdot \varphi(s),\ \forall r, s, \in R_1$$
$$\varphi(\lambda r) = \lambda \varphi(r),\ \forall \lambda \in K,\ \forall r \in R_1$$

Se φ for bijectiva então diz-se um **isomorfismo** e as álgebras R_1 e R_2 dizem-se **isomorfas**.

O Plano Quântico

Seja K um corpo e $q \in K$, com $0 \neq q \neq 1$.

Definição

O **plano quântico** é a K-álgebra gerada por x e por y, sujeitos à relação $yx = qxy$. Denota-se por $K_q[x, y]$.

O Plano Quântico

Seja K um corpo e $q \in K$, com $0 \neq q \neq 1$.

Definição

O **plano quântico** é a K-álgebra gerada por x e por y, sujeitos à relação $yx = qxy$. Denota-se por $K_q[x, y]$.

Os elementos de $K_q[x, y]$ escrevem-se de forma única como $\sum a_{i,j} x^i y^j$ com um número finito de coeficientes $0 \neq a_{i,j} \in K$ e $i, j \in \mathbb{N}$.

O Plano Quântico

Seja K um corpo e $q \in K$, com $0 \neq q \neq 1$.

Definição

O **plano quântico** é a K-álgebra gerada por x e por y, sujeitos à relação $yx = qxy$. Denota-se por $K_q[x, y]$.

Os elementos de $K_q[x, y]$ escrevem-se de forma única como $\sum a_{i,j} x^i y^j$ com um número finito de coeficientes $0 \neq a_{i,j} \in K$ e $i, j \in \mathbb{N}$.
$K_q[x, y]$ é um domínio, isto é, não tem elementos divisores de zero.

Isomorfismos entre planos quânticos

Sejam $K_q[x, y]$ e $K_p[u, v]$ os planos quânticos associados a dois diferentes escalares q e p. O problema do isomorfismo entre planos quânticos consiste em determinar as condições sobre p e q para $K_q[x, y]$ e $K_p[u, v]$ sejam isomorfos, como álgebras.

Isomorfismos entre planos quânticos

Sejam $K_q[x, y]$ e $K_p[u, v]$ os planos quânticos associados a dois diferentes escalares q e p. O problema do isomorfismo entre planos quânticos consiste em determinar as condições sobre p e q para $K_q[x, y]$ e $K_p[u, v]$ sejam isomorfos, como álgebras.

É fácil ver que se $p = q^{-1}$ então a função definida por $\varphi(x) = v$ e $\varphi(y) = u$ é um isomorfismo entre $K_q[x, y]$ e $K_p[u, v]$, pois:

$$\begin{aligned} yx = qxy \Rightarrow & \varphi(y)\varphi(x) = q\varphi(x)\varphi(y) \\ \Rightarrow & uv = qvu \\ \Rightarrow & vu = q^{-1}uv \end{aligned}$$

Extensões do plano quântico

O problema generaliza-se quando se consideram duas extensões do plano quântico:

Extensões do plano quântico

O problema generaliza-se quando se consideram duas extensões do plano quântico:

- o **toro quântico** é a K-álgebra $K_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ onde os termos monomiais da forma $\alpha x^i y^j$, $\alpha \in K \backslash \{0\}, i, j \in \mathbb{Z}$ são invertíveis.

Extensões do plano quântico

O problema generaliza-se quando se consideram duas extensões do plano quântico:

- o **toro quântico** é a K-álgebra $K_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ onde os termos monomiais da forma $\alpha x^i y^j$, $\alpha \in K \backslash \{0\}, i, j \in \mathbb{Z}$ são invertíveis.
- o q-**anel de divisão** é a álgebra de divisão $K_q(x, y)$ onde todos os elementos não-nulos são formalmente invertíveis.

Extensões do plano quântico

O problema generaliza-se quando se consideram duas extensões do plano quântico:

- o **toro quântico** é a K-álgebra $K_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ onde os termos monomiais da forma $\alpha x^i y^j$, $\alpha \in K \backslash \{0\}, i, j \in \mathbb{Z}$ são invertíveis.
- o q-**anel de divisão** é a álgebra de divisão $K_q(x, y)$ onde todos os elementos não-nulos são formalmente invertíveis.

Temos a seguinte cadeia de inclusões:

$$K_q[x, y] \subset K_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}] \subset K_q(x, y)$$

.

Como construir anéis de frações - Definição

Sejam R um anel e $X \subset R$ um subconjunto fechado para a multiplicação tal que $0 \notin X$ e $1 \in X$. A ideia passa por inverter os elementos de X, obtendo-se assim o chamado anel de frações à direita de R relativamente a X. Mais explicitamente:

Como construir anéis de frações - Definição

Sejam R um anel e $X \subset R$ um subconjunto fechado para a multiplicação tal que $0 \notin X$ e $1 \in X$. A ideia passa por inverter os elementos de X, obtendo-se assim o chamado anel de frações à direita de R relativamente a X. Mais explicitamente:

Definição

Um anel S diz-se um **anel de frações à direita** se existe um homomorfismo $\phi : R \longrightarrow S$ tal que:

a) $\forall x \in X$, $\phi(x)$ tem inverso em S,

b) $\forall s \in S, \exists r \in R, x \in X \ : \ s = \phi(r)\phi(x)^{-1}$,

c) $\ker(\phi) = \{r \in R \,|\, rx = 0, \text{ para algum } x \in X\}$.

Uma vez que S é único a menos de isomorfismo, denota-se por RX^{-1}.

Como construir anéis de frações - Condições

Se RX^{-1} for um anel de frações à direita, então satisfaz necessariamente duas condições:

$$1. \quad \forall r \in R, \forall x \in X, \quad rX \cap xR \neq \emptyset$$

Como construir anéis de frações - Condições

Se RX^{-1} for um anel de frações à direita, então satisfaz necessariamente duas condições:

$$1. \quad \forall r \in R, \forall x \in X, \quad rX \cap xR \neq \emptyset$$

Se tomarmos o elemento $\phi(x)^{-1}\phi(r) \in S$, podemos por b) escrever $\phi(x)^{-1}\phi(r) = \phi(r')\phi(x')^{-1}$ para alguns $r' \in R$, $x' \in X$. Logo,

$$\begin{aligned} & \phi(r)\phi(x') = \phi(x)\phi(r') \\ & \Leftrightarrow \phi(rx' - xr') = 0 \\ \text{por c) }, & \exists y \in X \ : \ (rx' - xr')y = 0 \\ & \Leftrightarrow r(x'y) = x(r'y) \quad \text{onde } x'y \in X, r'y \in R. \end{aligned}$$

À condição 1. chama-se **condição de Ore**.

Como construir anéis de frações - Condições

$$2. \quad \forall r \in R, \forall x \in X, \; xr = 0 \Rightarrow \exists x' \in X : \; rx' = 0$$

Como construir anéis de frações - Condições

$$2. \quad \forall r \in R, \forall x \in X, \; xr = 0 \Rightarrow \exists x' \in X : \; rx' = 0$$

Como ϕ é um homomorfismo, $xr = 0 \Rightarrow \phi(x)\phi(r) = 0$. Mas como $\phi(x)$ é invertível por a), temos que $\phi(r) = 0$ e por c), existe x' como afirmado.

À condição 2. chama-se **condição de reversibilidade à direita**.

Como construir anéis de frações - Condições

$$2. \quad \forall r \in R, \forall x \in X, \ xr = 0 \Rightarrow \exists x' \in X : \ rx' = 0$$

Como ϕ é um homomorfismo, $xr = 0 \Rightarrow \phi(x)\phi(r) = 0$. Mas como $\phi(x)$ é invertível por a), temos que $\phi(r) = 0$ e por c), existe x' como afirmado.

À condição 2. chama-se **condição de reversibilidade à direita**.

Um conjunto X que verifique 1. e 2. diz-se um **conjunto de denominadores à direita**, pois estas condições, além de necessárias, são também suficientes para que exista o anel de frações à direita RX^{-1}.

Como construir anéis de frações - Construção

Defina-se em $R \times X$ a seguinte relação de equivalência "$\sim$":

$$\begin{gathered}(r, x) \sim (r', x') \text{ sse existem } s, s' \in R \\ \text{tais que } xs = x's' \in X \text{ e } rs = r's' \in R.\end{gathered} \tag{1}$$

Como construir anéis de frações - Construção

Defina-se em $R \times X$ a seguinte relação de equivalência "$\sim$":

$$\begin{gathered}(r, x) \sim (r', x') \text{ sse existem } s, s' \in R \\ \text{tais que } xs = x's' \in X \text{ e } rs = r's' \in R.\end{gathered} \tag{1}$$

Denotem-se por rx^{-1} (ou r/x) a classe de equivalência de um par (r, x) e por RX^{-1} o conjunto destas classes de equivalência. Então, vejamos que RX^{-1} é de facto o anel de frações à direita de R relativamente a X.

Observação: Note-se que $r/x = (rs)/(xs)$ sempre que $xs \in X$. Isto é fundamental para reduzir 'frações' a um denominador comum.

Como construir anéis de frações - Operações

A adição em RX^{-1} é definida tendo por base a condição de Ore. Dadas duas frações r_1/x_1 e r_2/x_2, existem $a \in R$ e $y \in X$ tais que $x_2 a = x_1 y \in X$, visto que $x_2 R \cap x_1 X \neq \emptyset$. Assim pode-se definir:

$$r_1/x_1 + r_2/x_2 = (r_1 y + r_2 a)/t, \quad \text{onde } t = x_1 y = x_2 a. \tag{2}$$

Como construir anéis de frações - Operações

A adição em RX^{-1} é definida tendo por base a condição de Ore. Dadas duas frações r_1/x_1 e r_2/x_2, existem $a \in R$ e $y \in X$ tais que $x_2 a = x_1 y \in X$, visto que $x_2 R \cap x_1 X \neq \emptyset$. Assim pode-se definir:

$$r_1/x_1 + r_2/x_2 = (r_1 y + r_2 a)/t, \qquad \text{onde } t = x_1 y = x_2 a. \tag{2}$$

Para definir a multiplicação, usemos o facto que $x_1 R \cap r_2 X \neq \emptyset$ para encontrar $a \in R$ e $y \in X$ tais que $x_1 a = r_2 y$. Assim define-se:

$$(r_1/x_1).(r_2/x_2) = (r_1 a)/(x_2 y). \tag{3}$$

Como construir anéis de frações - Operações

A adição em RX^{-1} é definida tendo por base a condição de Ore. Dadas duas frações r_1/x_1 e r_2/x_2, existem $a \in R$ e $y \in X$ tais que $x_2 a = x_1 y \in X$, visto que $x_2 R \cap x_1 X \neq \emptyset$. Assim pode-se definir:

$$r_1/x_1 + r_2/x_2 = (r_1 y + r_2 a)/t, \quad \text{onde } t = x_1 y = x_2 a. \tag{2}$$

Para definir a multiplicação, usemos o facto que $x_1 R \cap r_2 X \neq \emptyset$ para encontrar $a \in R$ e $y \in X$ tais que $x_1 a = r_2 y$. Assim define-se:

$$(r_1/x_1).(r_2/x_2) = (r_1 a)/(x_2 y). \tag{3}$$

As duas operações estão bem definidas e têm elementos neutros $0/1$ e $1/1$, respetivamente. Logo, $(RX^{-1}, +, ., 0, 1)$ é de facto um anel.

Como construir anéis de frações - Homomorfismo

Seja $\varphi : R \longrightarrow RX^{-1}$ tal que $\varphi(r) = r/1$, $\forall r \in R$. Como $(r_1/1) + (r_2/1) = (r_1 + r_2)/1$ e $(r_1/1).(r_2/1) = (r_1 r_2/1)$, temos que φ é um homomorfismo.

Como construir anéis de frações - Homomorfismo

Seja $\varphi : R \longrightarrow RX^{-1}$ tal que $\varphi(r) = r/1$, $\forall r \in R$. Como $(r_1/1) + (r_2/1) = (r_1 + r_2)/1$ e $(r_1/1).(r_2/1) = (r_1 r_2/1)$, temos que φ é um homomorfismo.Mais ainda:

a) Temos que $1/x$ $(x \in X)$ é o inverso de $x/1 = \varphi(x)$

Como construir anéis de frações - Homomorfismo

Seja $\varphi : R \longrightarrow RX^{-1}$ tal que $\varphi(r) = r/1$, $\forall r \in R$. Como $(r_1/1) + (r_2/1) = (r_1 + r_2)/1$ e $(r_1/1).(r_2/1) = (r_1 r_2/1)$, temos que φ é um homomorfismo.Mais ainda:

a) Temos que $1/x$ $(x \in X)$ é o inverso de $x/1 = \varphi(x)$
b) Também se verifica que $r/x = (r/1).(1/x) = \varphi(r)\varphi(x)^{-1}$.

Como construir anéis de frações - Homomorfismo

Seja $\varphi : R \longrightarrow RX^{-1}$ tal que $\varphi(r) = r/1$, $\forall r \in R$. Como $(r_1/1) + (r_2/1) = (r_1 + r_2)/1$ e $(r_1/1).(r_2/1) = (r_1 r_2/1)$, temos que φ é um homomorfismo.Mais ainda:

a) Temos que $1/x$ $(x \in X)$ é o inverso de $x/1 = \varphi(x)$
b) Também se verifica que $r/x = (r/1).(1/x) = \varphi(r)\varphi(x)^{-1}$.
c) Por fim, note-se que $r/1 = 0/1 \Leftrightarrow \exists\, s, s' \in R : rs = 0s' = 0$ e $1s = 1s' \in X$. Assim,

$$\ker \varphi = \{r \in R \mid rs = 0 \ \text{ para algum } s \in X\}.$$

Como construir anéis de frações - Homomorfismo

Seja $\varphi : R \longrightarrow RX^{-1}$ tal que $\varphi(r) = r/1$, $\forall r \in R$. Como $(r_1/1) + (r_2/1) = (r_1 + r_2)/1$ e $(r_1/1).(r_2/1) = (r_1 r_2/1)$, temos que φ é um homomorfismo.Mais ainda:

a) Temos que $1/x$ $(x \in X)$ é o inverso de $x/1 = \varphi(x)$
b) Também se verifica que $r/x = (r/1).(1/x) = \varphi(r)\varphi(x)^{-1}$.
c) Por fim, note-se que $r/1 = 0/1 \Leftrightarrow \exists\, s, s' \in R : rs = 0s' = 0$ e $1s = 1s' \in X$. Assim,

$$\ker \varphi = \{r \in R \mid rs = 0 \text{ para algum } s \in X\}.$$

Isto conclui a demonstração de que RX^{-1} é um anel de frações à direita de R relativamente a X. Prova-se também que tal anel de frações é único a menos de isomorfismo.

O toro quântico e o q-anel de divisão

Prova-se recorrendo à definição que os conjuntos $\{x^i y^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ e $K_q[x, y] \backslash \{0\}$ são conjuntos de denominadores à direita e portanto dão origem a anéis de frações à direita de $K_q[x, y]$.

O toro quântico e o q-anel de divisão

Prova-se recorrendo à definição que os conjuntos $\{x^i y^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ e $K_q[x, y] \backslash \{0\}$ são conjuntos de denominadores à direita e portanto dão origem a anéis de frações à direita de $K_q[x, y]$.

Estes anéis são respetivamente:

- o toro quântico $K_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$.
- o q-anel de divisão $K_q(x, y) = \mathrm{Frac}(K_q[x, y])$.

O isomorfismo entre planos quânticos

Noções e resultados preliminares (no plano quântico)

- Um elemento f não-invertível e não-nulo diz-se **primo** se:

$$f|ab \Longrightarrow f|a \vee f|b, \text{ para todos } a, b \in K_q[x, y].$$

- Um elemento f diz-se **central** se $af = fa$ para todo $a \in K_q[x, y]$.

O isomorfismo entre planos quânticos

Noções e resultados preliminares (no plano quântico)

- Um elemento f não-invertível e não-nulo diz-se **primo** se:

$$f|ab \Longrightarrow f|a \vee f|b, \text{ para todos } a, b \in K_q[x, y].$$

- Um elemento f diz-se **central** se $af = fa$ para todo $a \in K_q[x, y]$.
- A imagem por isomorfismo de um elemento central e primo é ainda um elemento central e primo.
- Os elementos primos no plano quântico $K_q[x, y]$ são os múltiplos escalares de x e y e, caso q seja uma raiz da unidade, também os elementos irredutíveis e centrais. Neste caso, o centro é o subanel $K_q[x^n, y^n]$.

O isomorfismo entre planos quânticos

Seja φ um isomorfismo entre planos quânticos $K_q[x, y]$ e $K_p[u, v]$. A relação $yx = qxy$ transforma-se por isomorfismo na relação $\varphi(y)\varphi(x) = q\varphi(x)\varphi(y)$ em $K_p[u, v]$.

O isomorfismo entre planos quânticos

Seja φ um isomorfismo entre planos quânticos $K_q[x, y]$ e $K_p[u, v]$. A relação $yx = qxy$ transforma-se por isomorfismo na relação $\varphi(y)\varphi(x) = q\varphi(x)\varphi(y)$ em $K_p[u, v]$.

Como, em particular, x e y são primos e não são centrais, as suas imagens $\varphi(x)$ e $\varphi(y)$ são elementos primos e não centrais, e portanto são múltiplos escalares de u e v.

O isomorfismo entre planos quânticos

Só existem dois casos possíveis, para alguns $\lambda, \mu \in K \backslash \{0\}$:

$$\begin{array}{llll} (1) & \varphi(x) = \lambda u & \wedge & \varphi(y) = \mu v \\ (2) & \varphi(x) = \lambda v & \wedge & \varphi(y) = \mu u \end{array}$$

O isomorfismo entre planos quânticos

Só existem dois casos possíveis, para alguns $\lambda, \mu \in K\backslash\{0\}$:

$$\begin{array}{lllll} (1) & \varphi(x) = \lambda u & \wedge & \varphi(y) = \mu v \\ (2) & \varphi(x) = \lambda v & \wedge & \varphi(y) = \mu u \end{array}$$

No caso (1) tem-se $0 = \varphi(yx - qxy) = \lambda\mu(vu - quv)$
$= \lambda\mu(p - q)uv \Longrightarrow p = q.$

O isomorfismo entre planos quânticos

Só existem dois casos possíveis, para alguns $\lambda, \mu \in K\backslash\{0\}$:

$$\begin{array}{llll} (1) & \varphi(x) = \lambda u & \wedge & \varphi(y) = \mu v \\ (2) & \varphi(x) = \lambda v & \wedge & \varphi(y) = \mu u \end{array}$$

No caso (1) tem-se $0 = \varphi(yx - qxy) = \lambda\mu(vu - quv)$
$= \lambda\mu(p - q)uv \Longrightarrow p = q.$

No caso (2) tem-se $0 = \varphi(yx - qxy) = \lambda\mu(uv - qvu)$
$= \lambda\mu(1 - qp)uv \Longrightarrow p = q^{-1}.$

Isomorfismo entre toros quânticos

Noções e resultados preliminares

- Em $K_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$, os elementos x e y não são primos mas, nesta álgebra, adquirem outra propriedade importante: são invertíveis.

Isomorfismo entre toros quânticos

Noções e resultados preliminares

- Em $K_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$, os elementos x e y não são primos mas, nesta álgebra, adquirem outra propriedade importante: são invertíveis.
- Como tal, são também elementos invertíveis as suas imagens por um isomorfismo $\varphi : K_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}] \longrightarrow K_p[u^{\pm 1}, v^{\pm 1}]$.

Isomorfismo entre toros quânticos

Noções e resultados preliminares

- Em $K_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$, os elementos x e y não são primos mas, nesta álgebra, adquirem outra propriedade importante: são invertíveis.
- Como tal, são também elementos invertíveis as suas imagens por um isomorfismo $\varphi : K_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}] \longrightarrow K_p[u^{\pm 1}, v^{\pm 1}]$.
- As unidades em $K_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ são os termos monomiais, isto é, elementos da forma $\lambda x^i y^j$ com $\lambda \in K \backslash \{0\}$, $i, j \in \mathbb{Z}$.

Isomorfismo entre toros quânticos

Comecemos por escrever $\varphi(x) = \alpha u^i v^j$ e $\varphi(y) = \beta u^k v^l$ para alguns $\alpha, \beta \in K,\ i, j, k, l \in \mathbb{Z}$.

Isomorfismo entre toros quânticos

Comecemos por escrever $\varphi(x) = \alpha u^i v^j$ e $\varphi(y) = \beta u^k v^l$ para alguns $\alpha, \beta \in K,\ i, j, k, l \in \mathbb{Z}$.

Da relação $yx = qxy$ resulta a seguinte equação em $K_p[u^{\pm 1}, v^{\pm 1}]$:

$$\begin{aligned} \varphi(y)\varphi(x) &= q\varphi(x)\varphi(y) \\ \Leftrightarrow (\beta u^k v^l)(\alpha u^i v^j) &= q(\alpha u^i v^j)(\beta u^k v^l) \\ \Leftrightarrow \alpha\beta p^{il} u^{i+k} v^{j+l} &= q\alpha\beta p^{jk} u^{i+k} v^{j+l} \end{aligned}$$

o que implica, já que estamos num domínio,

$$p^{il-jk} = q. \tag{4}$$

Isomorfismo entre toros quânticos

Por outro lado, as pré-imagens de u e v são invertíveis em $K_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$, isto é, $\varphi^{-1}(u) = \lambda x^s y^t$ e $\varphi^{-1}(v) = \mu x^m y^n$ para alguns $\lambda, \mu \in K$, $s, t, m, n \in \mathbb{Z}$.

Isomorfismo entre toros quânticos

Por outro lado, as pré-imagens de u e v são invertíveis em $K_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$, isto é, $\varphi^{-1}(u) = \lambda x^s y^t$ e $\varphi^{-1}(v) = \mu x^m y^n$ para alguns $\lambda, \mu \in K$, $s, t, m, n \in \mathbb{Z}$.
Podemos escrever então:

$$
\begin{aligned}
u &= \varphi(\lambda x^s y^t) = \lambda(\alpha u^i v^j)^s (\beta u^k v^l)^t \\
&= \lambda \alpha^s \beta^t p^a u^{is+kt} v^{js+lt}; \\
v &= \varphi(\mu x^m y^n) = \mu\beta(\alpha u^i v^j)^m (\beta u^k v^l)^n \\
&= \mu \alpha^m \beta^n p^b u^{im+kn} v^{jm+ln}
\end{aligned}
$$

para alguns expoentes a e b inteiros.

Isomorfismo entre toros quânticos

Olhando apenas aos expoentes de u e v, obtém-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} is + kt &= 1 \\ js + lt &= 0 \\ im + kn &= 0 \\ jm + ln &= 1 \end{cases}$$

Isomorfismo entre toros quânticos

Olhando apenas aos expoentes de u e v, obtém-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} is + kt & = 1 \\ js + lt & = 0 \\ im + kn & = 0 \\ jm + ln & = 1 \end{cases}$$

isto é, matricialmente:

$$\begin{bmatrix} i & k \\ j & l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & m \\ t & n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Isomorfismo entre toros quânticos

Olhando apenas aos expoentes de u e v, obtém-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} is + kt & = 1 \\ js + lt & = 0 \\ im + kn & = 0 \\ jm + ln & = 1 \end{cases}$$

isto é, matricialmente:

$$\begin{bmatrix} i & k \\ j & l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & m \\ t & n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Daqui resulta que $il - jk = \pm 1$ e portanto, $p = q^{\pm 1}$.

Caso geral: isomorfismo entre anéis de frações de planos quânticos

O problema ainda se encontra em aberto. Alev e Dumas (1994) introduziram um invariante, que resolveu o problema no caso em q não é uma raiz da unidade.

Caso geral: isomorfismo entre anéis de frações de planos quânticos

O problema ainda se encontra em aberto. Alev e Dumas (1994) introduziram um invariante, que resolveu o problema no caso em q não é uma raiz da unidade.

Definição

Seja D uma álgebra de divisão sobre K. Denota-se por $\mathbf{G(D)}$ o subgrupo multiplicativo $[D^*, D^*] \cap K^*$, onde $[D^*, D^*] = \langle aba^{-1}b^{-1} | \, a, b \in D^* \rangle$ é o subgrupo gerado pelos comutadores.

O invariante G(D)

$G(D) = [D^*, D^*] \cap K^*$ é **invariante** por isomorfismo, isto é, dados $D_1 = K_q(x, y)$, $D_2 = K_p(u, v)$ e um isomorfismo $\varphi : D_1 \longrightarrow D_2$, tem-se que $G(D_1) = G(D_2)$.

O invariante G(D)

$G(D) = [D^*, D^*] \cap K^*$ é **invariante** por isomorfismo, isto é, dados $D_1 = K_q(x, y)$, $D_2 = K_p(u, v)$ e um isomorfismo $\varphi : D_1 \longrightarrow D_2$, tem-se que $G(D_1) = G(D_2)$.

Proposição (Alev; Dumas (1994))

$G(K_q(x, y)) = < q >$

O invariante G(D)

$G(D) = [D^*, D^*] \cap K^*$ é **invariante** por isomorfismo, isto é, dados $D_1 = K_q(x,y)$, $D_2 = K_p(u,v)$ e um isomorfismo $\varphi : D_1 \longrightarrow D_2$, tem-se que $G(D_1) = G(D_2)$.

Proposição (Alev; Dumas (1994))

$G(K_q(x,y)) = < q >$

A junção dos dois resultados permite concluir que se dois anéis de frações à direita $K_q(x,y)$ e $K_p(x,y)$ são isomorfos então $< q > = < p >$. Se q não for uma raiz da unidade, então $p = q^{\pm 1}$.

Automorfismos em $K_q(x, y)$ e elementos fixos

Dado um automorfismo σ em $K_q(x, y)$ (um isomorfismo de $K_q(x, y)$ em $K_q(x, y)$), um elemento **fixo** é um $r \in K_q(x, y)$ tal que $\sigma(r) = r$. O conjunto dos elementos fixos em $K_q(x, y)$ forma por sua vez o chamado **anel fixo por** σ e denota-se por $K_q(x, y)^{\sigma}$.

Automorfismos em $K_q(x, y)$ e elementos fixos

Dado um automorfismo σ em $K_q(x, y)$ (um isomorfismo de $K_q(x, y)$ em $K_q(x, y)$), um elemento **fixo** é um $r \in K_q(x, y)$ tal que $\sigma(r) = r$. O conjunto dos elementos fixos em $K_q(x, y)$ forma por sua vez o chamado **anel fixo por** σ e denota-se por $K_q(x, y)^\sigma$.

Num artigo de 2014, Siân Fryer trabalhou com vários automorfismos de ordem finita, onde conseguiu estebelecer isomorfismos entre o q-anel de divisão e o seu anel dos elementos fixos.

Automorfismos em $K_q(x,y)$ e elementos fixos

Dado um automorfismo σ em $K_q(x,y)$ (um isomorfismo de $K_q(x,y)$ em $K_q(x,y)$), um elemento **fixo** é um $r \in K_q(x,y)$ tal que $\sigma(r) = r$. O conjunto dos elementos fixos em $K_q(x,y)$ forma por sua vez o chamado **anel fixo por** σ e denota-se por $K_q(x,y)^\sigma$.

Num artigo de 2014, Siân Fryer trabalhou com vários automorfismos de ordem finita, onde conseguiu estebelecer isomorfismos entre o q-anel de divisão e o seu anel dos elementos fixos.

A fim de ganhar maior intuição sobre a estrutura o q-anel de divisão, estudamos este artigo e procuramos em particular estender os resultados de Fryer a um automorfismo de ordem 5:

$$\begin{aligned} \varphi : K_q(x,y) &\longrightarrow K_q(x,y) \\ x \longmapsto y; \quad & y \longmapsto x^{-1}(y+q^{-1}). \end{aligned}$$

Referências Bibliográficas

(para quem quiser saber os detalhes)

[1] T.Y. Lam, *Lectures on Modules and Rings*, Springer-Verlag New York, 1999.

[2] J. Alev et F. Dumas, *Sur le corps des fractions de certaines algèbres quantiques*, J. Algebra, **170**, 1994, 229-265.

[3] K. R. Goodearl et R. B. Warfield, *An Introduction to Noncommutative Noetherian Rings*, London Math. Soc. Student Text Series, Vol. 16, Cambridge Univ. Press, London/New York, 1989.

[4] R. Coulibaly e K. Price, *Factorization in Quantum Planes*, Missouri J. Math. Sci. 18, No. 3, 2006, 197-205.

[5] L. Richard, *Equivalence rationelle et homologie de Hochschild pour certaines algèbres polynomiales classiques et quantiques*, tese de doutoramento, Universidade Blaise Pascal, 2002.

[6] S. Fryer, *The q-division ring and its fixed rings*, J. Algebra, 402, 2014, 358-378.